# Densité des polynômes orthogonaux

Objectif Agreg 110 140

Théorème : Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho$ une fonction poids $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)\,dx < \infty\right)$
Si il existe $\alpha > 0$, telle que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\,dx < \infty$
Alors la famille des polynômes orthogonaux associée à $\rho$, forme une base hilbertienne de $(L^2(I,\rho), \langle .,. \rangle_\rho)$ où $\langle f,g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$

Preuve : L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nous fournit une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormée pour $\langle .,. \rangle_\rho$.

Montrons que cette famille est une base hilbertienne, i.e $\mathrm{Vect}(P_n)^\perp = \{0\}$. Or par Gram-Schmidt, on a $\mathrm{Vect}(P_n) = \mathrm{Vect}(X^n)$

Montrons que $\mathrm{Vect}(X^n)^\perp = \{0\}$ : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in L^2(I,\rho)$ tel que $\langle f, g_n \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ où $g_n : x \mapsto x^n$.

On pose $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)\rho(x)\mathbb{1}_I(x)$ où $f \in L^2(I,\rho)$

Etape 1 : Montrons que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ :

On utilise l'inégalité : $\forall t \geq 0 \quad t \leq \frac{1+t^2}{2}$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx = \int_I |f(x)|\rho(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\int_I \rho(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_I |f(x)|^2 \rho(x)\,dx$$

$< \infty$ car $\rho$ est une fonction poids et $f \in L^2(I,\rho)$

Donc $\varphi$ est une fonction $L^1(\mathbb{R})$.

Etape 2 : Prolongement de $\hat{\varphi}$.

Comme $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on peut considérer sa transformée de Fourier : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(\xi) = \int_I f(x)\rho(x)e^{-ix\xi}dx$

Montrons que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe $F$ sur $B_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}$. On pose $F(z) = \int_I g(z,x)dx$ $\forall z \in B_a$ où $\forall z \in B_a, \forall x \in I$, $g(z,x) = e^{-izx}f(x)\rho(x)$.

Montrons que cette intégrale est bien définie : $|e^{izx}| \le e^{|\mathrm{Im}(z)|x} \le e^{\frac{a}{2}x}$

Ainsi, $\forall z \in B_a$, $\left|\int_I g(z,x)dx\right| \le \int_I e^{\frac{a}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)dx \le \left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Appliquons le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :

* $\forall z \in B_a$, $x \mapsto g(z,x)$ est intégrable sur $I$.
* $\forall x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur $B_a$ (car c'est une exponentielle)
* $\forall z \in B_a$, $|g(z,x)| \le e^{\frac{a}{2}|x|}f(x)\rho(x)$ qui est intégrable sur $I$.

Donc $F$ est une fonction holomorphe qui coincide avec $\hat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$.

Etape 3 : On calcul $F^{(n)}(0)$ pour montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle f, g_n \rangle = 0$ alors $f = 0$.

Comme $F$ est holomorphe sur $B_a$, elle est en particulier $\mathcal{C}^\infty$ sur $B_a$ (ouvert de $\mathbb{C}$).

Donc $\forall z \in B_a$, $F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx}f(x)\rho(x)dx$ et on a $F^{(n)}(0) = (-i)^n \langle f, g_n \rangle_\rho$

Or si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle f, g_n \rangle_\rho = 0$, on a $F(0) = 0$ par unicité du DSE et d'après le principe du prolongement analytique, $F$ est nulle sur le connexe $B_a$.

Comme $F$ coincide sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{\varphi}$, on a $\hat{\varphi} = 0$.

Or $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ donc par injectivité de la transformée de Fourier, $\varphi = 0$.

Ainsi, $f = 0_{pp}$ car $\rho$ est strictement positive.

D'où le résultat.